7.(vi) সহ সম্বন্ধ (Corelation & Co-efficient of Correlation)

আলোচ্য বিষয়বস্তু : সহ সম্বন্ধ—ধনাত্মক সহগতি—ঋণাত্মক সহগতি—শূন্য সহগতি—অবিন্যস্ত স্কোরের সহগাঙ্ক—সহগতি সহগাঙ্ক 'r' এর তাৎপর্য—● প্রোডাক্ট মোমেন্ট পদ্ধতি—সুবিধা—ত্রুটি প্রোডাক্ট মোমেন্ট সহগতি ও র‍্যাঙ্ক পার্থক্য পদ্ধতি—অসুবিধা ● র‍্যাঙ্ক পার্থক্য সহগতি ● শিক্ষাক্ষেত্রে সহগতি সহগাঙ্কের ব্যবহার—উদাহরণ।

☐ সহ সম্বন্ধ (Corelation & Co-efficient of Correlation) :

সহ সম্বন্ধ হল কোন দুই চলের (Variable) মধ্যে এমন একটি সম্বন্ধ যার মধ্যে চল দুটির পারস্পরিক নির্ভরতার মাত্রা নির্ণয় করা যেতে পারে। Guilford-এর মতে যখন দুটি শ্রেণি বা ঘটনার মধ্যে একটি পরিমানগত বা গুণগত সম্বন্ধ থাকে, তখন সেই সম্বন্ধ নির্ধারণ, পরিমাপ ও সঠিকভাবে প্রকাশ করার উপযুক্ত পরিসংখ্যানমূলক সূত্র হল সহ-সম্বন্ধ।

(When there is a relationship of a quantitative or qualitative nature between two sets of phenomena, the appropriate statistical test for discovering and measuring the relationship and expresing it in a precise way is known as correlation).

যদি দুটি চলরাশি (Variable) পরস্পরের সাথে এমন ভাবে সম্পর্কিত হয় যে একটির পরিবর্তন ঘটলে অপরটিও পরিবর্তিত হয় তখন বলা হয় দুটি রাশির মধ্যে সহগতি রয়েছে। যেমন :- একটি বৃত্তের ব্যাসের কমা বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে তার পরিধি কমে বাড়ে। অর্থাৎ ব্যাস ও পরিধি পরস্পরের সঙ্গে সম্পর্কিত। শিক্ষাক্ষেত্রে বুদ্ধি ও গণিতে পারদর্শিতা পরস্পরের মধ্যে সম্পর্কিত।

যে গাণিতিক সূচক দ্বারা দুটি চলের মধ্যকার সহগতির পরিমাপ ও গুণগত বৈশিষ্ট্য প্রকাশ করা হয় তাকেই বলে সহগতির সহগাঙ্ক (Co-efficient of Correlation)। সহগাঙ্ককে সাধারণত r দ্বারা প্রকাশ করা হয়। r এর মান –1 থেকে +1 পর্যন্ত হতে পারে।

Karl Pearson দুটি চলের মধ্যে সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক নির্ণয়ের পদ্ধতি প্রবর্তন করেন। পিয়ারসন পদ্ধতিতে যখন সহসম্বন্ধ নির্ণয় করা হয় তখন সর্বদা ধরে নেওয়া হয় দুটি চলের মধ্যে সরলরৈখিক সম্পর্ক আছে। এই সম্বন্ধকে Product moment coefficient বলে। এর মান '–'1 থেকে '+'1 পর্যন্ত বিস্তৃত হতে পারে। যখন দুটি চলের একটির মানের বৃদ্ধি বা হ্রাস অপরটির মান যথাক্রমে সমপরিমাণ বৃদ্ধি বা হ্রাস অর্থাৎ চলরাশিদ্বয়ের মানের পরিবর্তন সমমুখী হয় তখন সহগতি গুণাঙ্ককে +1 হয়। যেমন একটি শ্রেণির ছাত্রদের I.Q ও পরীক্ষার ফলাফল একই হারে পরিবর্তিত

তখন তাদের মধ্যে সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক হল +1 আবার যদি একটি চলের মানের হ্রাস বা বৃদ্ধিতে অপরটির মান যথাক্রমে সম পরিমাণ বৃদ্ধি বা হ্রাস পায় অর্থাৎ চলরাশিদ্বয়ের মানের পরিবর্তন বিপরীতমুখী হয় তখন সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক –1 ধরা হয়। ধর, যেমন কোনো একটি শ্রেণিতে ছাত্ররা বাংলাতে ভাল নম্বর পেয়েছে এবং আনুপাতিক হারে অঙ্কে খারাপ নম্বর পেয়েছে। এক্ষেত্রে উভয় বিষয়ের মধ্যে সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক হল –1.

আবার দুটি চলরাশির মধ্যে এমন সম্পর্ক থাকে যে একটির মানের পরিবর্তনের উপর অপরটির মান নির্ভরশীল নয়। তাহলে সেরূপ ক্ষেত্রে রাশি দুটি পরস্পর সম্বন্ধহীন (uncorrelated) হবে। এক্ষেত্রে সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক হল 0. যেমন ছাত্রদের উচ্চতার সঙ্গে তাদের অঙ্কের ফলাফলের কোনো সম্পর্ক নেই।

তাই সহসম্বন্ধের গুণাঙ্কের মান –1 থেকে +1 পর্যন্ত্য যে কোন মান হতে পারে।

সহগতি তিন ধরনের হত পারে—(1) ধনাত্মক সহগতি (Positive Correlation) (2) ঋণাত্মক সহগতি (Negative Correlation) (3) শূন্য সহগতি (Zero Correlation)

(1) ধনাত্মক সহগতি ঃ

যদি দুটি চলরাশির একটি বৃদ্ধি পেলে অপরটি বৃদ্ধি পায় আবার একটি হ্রাস পেলে অপরটিও হ্রাস পায় তখন চলরাশি দুটির মধ্যে ধনাত্মক সহগতি আছে বলা হয়। যখন দুটি চলের মধ্যে পরিপূর্ণ ধনাত্মক সহগতি থাকে অর্থাৎ একটি চল রাশির যে কোনো পরিমাণ পরিবর্তনে অপরটির সমপ্রকৃতির সমপরিমাণ পরিবর্তন হয় তখন চলরাশি দুটির মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক (r) হয় +1 ধরা যাক কোনো বিশেষ পরিস্থিতিতে কোনো একটি শ্রেণির ছাত্রদের বুদ্ধ্যাঙ্ক যে হারে বাড়ছে তাদের প্রাপ্ত পরীক্ষার নম্বরও সেই হারে বাড়ছে এক্ষেত্রে বুদ্ধ্যাঙ্ক ও পরীক্ষার ফলাফলের মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক +1. তাপমাত্রা ও থার্মোমিটারে পারদ স্তম্ভের উচ্চতার মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক +1.

(চিত্র -১)

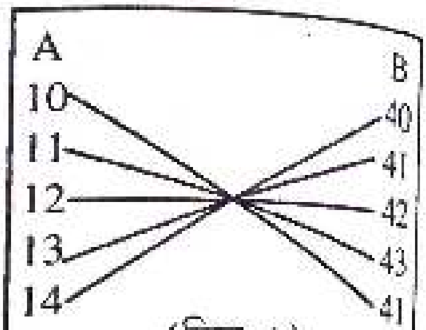
চিত্র -১ এতে A স্তম্ভের ও B স্তম্ভের একদল ছাত্রের দুটি বিষয়ে নম্বর আছে। চিত্রে দেখা যাচ্ছে যারা A স্তম্ভে যারা বেশি পেয়েছে তারা B তেও বেশি পেয়েছে। এক্ষেত্রে A পরিবর্তনের সঙ্গে B এর সমপরিমাণ পরিবর্তন হয়েছে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে r = +1

(2) ঋণাত্মক সহগতি ঃ

যখন দুটি চলরাশির মধ্যে বিপরীত সম্পর্ক থাকে অর্থাৎ একটি চলরাশির বৃদ্ধিতে অপরটি হ্রাস পায় তখন রাশি দুটির মধ্যে ঋণাত্মক সহগতি আছে বলা হয়।

যখন দুটি চলের মধ্যে সম্পূর্ণ বিপরীত সম্পর্ক থাকে তখন চলরাশির দুটির মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক r এর মান –1 হয়।

যেমন ঃ কোনো বিশেষ পরিস্থিতিতে দেখা গেল, যে সব ছাত্ররা ইংরাজিতে ভালো নম্বর পেয়েছে তারা আনুপাতিক হারে অঙ্কে খারাপ নম্বর পেয়েছে বা যারা অঙ্কে ভালো নম্বর পেয়েছে, আনুপাতিক হারে তারা ইংরাজিতে খারাপ নম্বর পেয়েছে তখন ইংরাজি ও অঙ্কের মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক –1.



(চিত্র -২)

চিত্র ২নং দেখা যাচ্ছে যারা A তে বেশি নম্বর পেয়েছে তারা B তে কম নম্বর ও যারা A তে কম নম্বর পেয়েছে তারা B তে বেশি নম্বর পেয়েছে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে A এর পরিবর্তনের সঙ্গে B এর পরিবর্তন সম্পূর্ণ বিপরীত। তাই এক্ষেত্রে r = –1

সুতরাং পূর্ণ ধনাত্মক সহগতির সহগাঙ্ক (r) এর মান +1 এবং পূর্ণ ঋণাত্মক সহগতির সহগাঙ্ক (r) এর মান –1. এই দুই চরম প্রান্তের মধ্যে (+1 ও –1) এর মধ্যে r এর মান বর্তমান থাকে।

○ **শূন্য সহগতি ঃ**

যখন দুটি চলের মধ্যে একটির কোনো পরিবর্তন অপরকে প্রভাবিত করতে পারে না তখন রাশি দুটির মধ্যে শূন্য সহগতি আছে বলা হয়। এক্ষেত্রে সহগতির সহগাঙ্ক r এর মান শূন্য।

ছাত্র	বয়স	উপস্থিতির দিন
ক	16	150
খ	15	160
গ	14	135
ঘ	13	170
ঙ	12	145

(চিত্র -৩)

চিত্র ৩-এ দেখা যাচ্ছে ছাত্রদের বয়সের সঙ্গে উপস্থিতি দিনের কোনো সম্পর্ক নেই। এক্ষেত্রে সহগতির সহগাঙ্ক প্রায় 0 এর কাছাকাছি।

ছাত্রের উচ্চতার সঙ্গে অঙ্কে নম্বরের কোন সম্পর্ক নেই। তাই এক্ষেত্রে সহগাঙ্ক r = 0।

সহসম্বন্ধ রৈখিক (linear) বা অরৈখিক (non linear) হতে পারে। দুটি চলের মানের পরিবর্তনের অনুপাত ধ্রুবক হলে তাদের সহসম্বন্ধ রৈখিক কিন্তু চল দুটির মানের অনুপাত ধ্রুবক না হলে তাদের সহ সম্বন্ধের মানকে অরৈখিক বলে। যেমন মানুষের বয়স ও শারিরীক শক্তির মধ্যে সহ সম্বন্ধ অরৈখিক।

সহগতির সহগাঙ্ক নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি আছে। এর মধ্যে রৈখিক সম্পর্ক যুক্ত দুটি পদ্ধতি রয়েছে। যেমন—(1) প্রোডাক্ট মোমেন্ট পদ্ধতি (Product Moment Method) এবং (2) র‍্যাঙ্ক পার্থক্য পদ্ধতি (Rank Difference Method)।

● (1) প্রোডাক্ট মোমেন্ট পদ্ধতি (Product Moment Method) :

রৈখিক সম্পর্ক যুক্ত দুটি চলের মধ্যে সহগতির সহগাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য যে পদ্ধতি রয়েছে তাকে প্রোডাক্ট মোমেন্ট পদ্ধতি বলে। এই পদ্ধতিতে সহগতির সহগাঙ্ককে 'r' দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

পিয়ারসনের মতে : সহসম্বন্ধের গুণফল গুণাংক (Co-effrent currelation) হল এমন একটি অনুপাত যা একটি চলের পরিবর্তনের সাথে অপর চলের যে পরিবর্তন হচ্ছে তার সীমা প্রকাশ করে (Product noment coefficient of correlation is a kind of ratio that express the extent to which change in the variable is accompanied by change in another variable). এই পদ্ধতিতে মান নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি আছে তার মধ্যে কয়েকটি হল :

অবিন্যস্ত স্কোরের সহগাঙ্ক : X ও Y যদি দুটি চল শ্রেণি হয় এবং M_1 ও M_2 যদি ঐ দুই শ্রেণির গড় হয়। এবং শ্রেণি দুটিতে স্কোর সংখ্যা যদি N হয় তবে x হল X শ্রেণির প্রতিটি রাশিকে M_1 দ্বারা বিয়োগ করে যে চ্যুতি পাওয়া যায় এবং অনুরূপে y হল Y শ্রেণির প্রতি রাশিকে M_2 দ্বারা বিয়োগ করে যে চ্যুতি পাওয়া যায় চ্যুতি দ্বয়ের গুণফল xy। এইভাবে সব xy যোগ করে পাওয়া যায় Σxy এরপর X শ্রেণির চল রাশির S.D হল σ_x ও Y শ্রেণির চলরাশির S.D হয় σ_y প্রোডাক্ট মোমেন্ট পদ্ধতি অনুযায়ী সহগতির সহগাঙ্ক

$$(r) = \frac{\sum xy}{N\sigma_x\sigma_y} \quad [x = X - M_1;\ y = Y - M_2]$$

X = X চল শ্রেণির যে কোনো স্কোর

Y = Y চল শ্রেণির যে কোনো স্কোর

প্রত্যক্ষভাবে স্কোর থেকে :

$$r = \frac{N\sum XY - \sum X\sum Y}{\sqrt{N\sum X^2 - (\sum X)^2} \times \sqrt{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}$$

যেখানে N = স্কোর সংখ্যা

ΣXY = X শ্রেণির স্কোর ও Y শ্রেণির স্কোরগুলির গুণফল এর যোগফল

ΣX = X শ্রেণির স্কোর সমূহের যোগফল ও ΣY = Y শ্রেণির স্কোর সমূহের যোগফল

ΣX^2 ও ΣY^2 হল যথাক্রমে X ও Y শ্রেণির স্কোরগুলির বর্গের সমষ্টি

কল্পিত গড় পদ্ধতিতে সহগাঙ্ক নির্ণয় ঃ

$$r_{xy} = \frac{\frac{\sum x'y'}{N} - c_x c_y}{\sigma' x \, \sigma' y}$$ [দুটি পরিসংখ্যা বিভাজনের স্কোর (X ও Y) সমূহের থেকে কল্পিত গড়ের বিয়োগ ফল যথাক্রমে x', y'

$$\sigma'_x = \sqrt{\frac{\sum fx'^2}{N} - \left(\frac{\sum fx'}{N}\right)^2}$$ [σ'x , σ'y হলে ওই দুটি পরিসংখ্যা বিভাজনের SD.]

$$\sigma'_y = \sqrt{\frac{\sum fy'^2}{N} - \left(\frac{\sum fy'}{N}\right)^2} \quad \left[c_x = \frac{\sum fx'}{N}, c_y = \frac{\sum fy'}{N}\right]$$

N = মোট স্কোর সংখ্যা

সহগতি সহগাঙ্ক 'r' এর তাৎপর্য্য ঃ

গিলফোর্ড সহগতি সহগাঙ্ক গুণাঙ্কের মাত্রার উপর ভিত্তি করে সহ সম্বন্ধকে নিম্ন লিখিত শ্রেণিগুলিতে ভাগ করেন ঃ

সহগাঙ্ক (r এর মান)	সম্বন্ধ
(i) .00 থেকে ±0.20	খুবই কম
(ii) ±0.21 থেকে ±0.40	কম
(iii) ±0.41 থেকে ±0.60	সাধারণ
(iv) ±0.61 থেকে ±0.80	অধিক
(v) ±0.81 থেকে ±0.99	খুবই বেশি
(vi) ±1.00	পরিপূর্ণ সহসম্বন্ধ

বিশেষ ক্ষেত্রে কোনটি গ্রহণ করা হবে তা বিচার করা হয় (a) চল গুলির প্রকৃতি (b) যে উদ্দেশ্যে সহগতি নির্ণয় করা হয় তার প্ররিপ্রেক্ষিতে।

শিক্ষাতত্ত্ব, মনোবিজ্ঞান প্রভৃতি বিষয়গুলির তাৎপর্য্য নির্ণয়ের ক্ষেত্রে উক্ত মানগুলি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।

(3) যেখানে সঠিক তথ্য জানা থাকে না, তথ্য ক্রম অনুযায়ী সারিবদ্ধ অবস্থায় থাকে সেখানে Rank difference পদ্ধতিতে ρ নির্ণয় করা সুবিধা জনক।

র‍্যাঙ্ক পার্থক্য পদ্ধতির ত্রুটি ঃ

(1) স্কোরের উপর কোনো গুরুত্ব দেওয়া হয় না। শুধুমাত্র স্কোরের অবস্থানের উপর গুরুত্ব দেওয়া হয়।

(2) স্কোরগুলিকে সারিবদ্ধ করার সময় সারির পুনরাবৃত্তি ঘটলে ত্রুটি বেড়ে যায়.

(3) পদ সংখ্যা 30 এর চেয়ে বেশি হলে ρ এর মান নির্ণয় কষ্ট সাধ্য হয়।

প্রোডাক্ট মোমেন্ট সহগতি (r) ও র‍্যাঙ্ক পার্থক্য সহগতি (ρ) ঃ

(1) এই দুটি পদ্ধতিতে সহ সম্বন্ধ দুটি রৈখিক সম্পর্কের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

(2) যখন স্কোর সংখ্যা কম হয় তখন r ও ρ এর মান প্রায় সমান।

(3) স্কোরের পুনরাবৃত্তি ঘটলে r ও ρ এর মান সমান হবে না।

(4) তবে এই দুটি পদ্ধতিতে নির্ণীত r ও ρ এর মান প্রায় সমান থাকে না কারণ ρ নির্ণয়ে বেশ কিছু ত্রুটি আছে যেমন Score মানের উপর ρ নির্ণয়ের কোনো গুরুত্ব দেওয়া হয় না, কেবল মাত্র স্কোরের অবস্থানের উপর গুরুত্ব আরোপ করা হয়। আর প্রোডাক্ট মোমেন্ট পদ্ধতিতে স্কোরের মান ও অবস্থান উভয়ের ওপর গুরুত্ব দেওয়া হয়। এই কারণে Product mement পদ্ধতিতে নির্ণীত সহগাঙ্ক অপেক্ষাকৃত ত্রুটি কম থাকে।

(5) স্কোরের পুনরাবৃত্তি ঘটলে র‍্যাঙ্ক পদ্ধতিতে নির্ণীত মানে ত্রুটি বাড়ে।

(6) Product mement পদ্ধতিতে সহগাঙ্ক নির্ণয় অপেক্ষা Rank difference পদ্ধতিতে সহগতির সহগাঙ্ক নির্ণয় অপেক্ষাকৃত সহজ তাই শিক্ষাতত্ত্ব, মনোবৈজ্ঞানিক ও সমাজতত্ত্বে এই পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়।

(7) র‍্যাঙ্কগুলিকে যদি কোনো আদর্শমানের থেকে চ্যুতি হিসেবে বিবেচনা করে Product moment সহগাঙ্ক নির্ণয় করা যায় তবে সেক্ষেত্রে r ও ρ এর মান সমান হয়।

শিক্ষাক্ষেত্রে সহগতি সহগাঙ্কের ব্যবহার (Use of co-efficient of co-relation in Education) ঃ

সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক মান (r) একটি গাণিতিকসূচক। শিক্ষামূলক পরিমাপের ক্ষেত্রে এর অনেক উপযোগিতা লক্ষ করা যায়। এই গুণাঙ্কের সাহায্যে শিক্ষা বিষয়ক বিভিন্ন প্রকার সিদ্ধান্তও গ্রহণ করা হয়।

X	Y	Rx	Ry	D=Rx−Ry	D²
19	17	4.5	6	1.5	2.25
20	21	3	2	1.0	1.00
19	22	4.5	1	3.5	12.25
18	13	6.5	9	2.5	6.25
15	11	10	11	1.0	1.00
21	18	2	5	3.0	9.00
					$\Sigma D^2 = 74.50$

$$r = 1-\frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)} = 1-\frac{6\times 74\cdot 5}{12(12^2-1)} \quad [\text{এক্ষেত্রে } N=12]$$

$$=1-\frac{470}{12\times 143}=1-0.26=0.74$$

এক্ষেত্রে সহগতির সহগাঙ্কের মান + 0.74 এবং এই মান ধনাত্মক এবং উচ্চমান সম্পন্ন তাই X এর মান বৃদ্ধিতে Y এর মানও বৃদ্ধি পাবে। আবার X এর মান হ্রাস Y এর মানও হ্রাস পাবে।

Example 2 :

Compute the correlation coefficient given :

$\Sigma X=12 \quad \Sigma Y=100 \quad \Sigma XY=86.2 \quad \Sigma X^2=60 \quad \Sigma Y^2=428 \quad N=25$

Coefficient of correlation

$$r = \frac{N\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{\left[N\Sigma X^2-(\Sigma X)^2\right]\left[N\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2\right]}}$$

এক্ষেত্রে $\Sigma XY=86.2, \ \Sigma X=12, \ \Sigma Y=100,$
$\Sigma X^2=60, \ \Sigma Y^2=428, \ N=25$

$$r = \frac{25\times 86\cdot 2-12\times 100}{\sqrt{\left[25\times 60-(12)^2\right]\left[25\times 428-(100)^2\right]}}$$

$$\frac{955}{\sqrt{1356\times 700}}=\frac{955}{\sqrt{949200}}=\frac{955}{974\cdot 27}=+0\cdot 98$$

এক্ষেত্রে চলরাশি দুটির মধ্যে উচ্চধনাত্মক সহগতি রয়েছে।

Example 3 :

Find out the Correlation Co-efficient form the data given below. Interpret your finding.

Individuals		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Scores	X	13	12	10	10	8	6	6	5	3	2
	Y	11	14	11	7	9	11	8	7	6	1

Ans :

Individuals	Scores X	Scores Y	R_X	R_Y	D=Rx−Ry	D^2
A	13	11	1	3	+2	4.0
B	12	14	2	1	+1	1.0
C	10	11	3.5	3	+0.5	0.25
D	10	7	3.5	7.5	+4.0	16.00
E	8	9	5	5	0	0.0
F	6	11	6.5	3	+3.5	12.25
G	6	8	6.5	6	+0.5	0.25
H	5	7	8	7.5	+0.5	0.25
I	3	6	9	9	0.0	0.00
J	2	1	10	10	0.0	0.00
						$\sum D^2 = 34.00$

এখানে N = 10

$$\rho = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$$

$$\therefore \rho = 1 - \frac{6 \times 34}{10(100-1)} = 1 - \frac{204}{10 \times 99} = 1 - 0.206 = 0.794$$

Interpretations :

X ও Y স্কোরের মধ্যে ধনাত্মক সহগতি এবং উচ্চমানের Score X এর মান বৃদ্ধি পেলে Y এর মান বৃদ্ধি পাবে, আবার X এর মান হ্রাস পেলে Y এর মানও হ্রাস পাবে।

Example 4 :

Find out the Correlation of Coefficient from the data given below and interpret your finding :

Scores on two Measures of memory span							
	X	2	3	4	5	6	7
	Y	0	3	4	4	6	11

Ans :

X-Score	Y-Score	X স্কোরের র‍্যাঙ্ক (R^1)	Y স্কোরের র‍্যাঙ্ক (R_2)	$D=R_1 \sim R_y$	D^2
2	0	6	6	0	0
3	3	5	5	0	0
4	4	4	3.5	0.5	0.25
5	4	3	3.5	0.5	0.25
6	6	2	2	0	0
7	11	1	1	0	0

$\Sigma D^2 = 0.50$

র‍্যাঙ্ক পার্থক্যের নিয়ম অনুযায়ী সহগতির সহগাঙ্ক (ρ)- এর মান নির্ণয় করা সম্ভব।

$$\rho = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$$

$N = 6,\ \Sigma D^2 = 0.50$

$$\therefore\ \rho = 1 - \frac{6 \times 0.50}{6(6^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{3}{6 \times 35} = 1 - \frac{1}{70} = \frac{69}{70} = 0.986$$

Interpretation :

দুটি পরিমাপের স্কোরের মধ্যে সহগতি সহগাঙ্কের মান 0.986 অর্থাৎ এদের মধ্যে সম্পর্ক অতি উচ্চমানের ও ধনাত্মক। অর্থাৎ একটির মান পরিবর্তনে অপরটির মানেরও প্রায় সমপরিমাণ ও সমপ্রকৃতির পরিবর্তন পরিলক্ষিত হচ্ছে।

Example 5 :

Compute the value of co-efficient of co-relation between the following two series of scores obtained by a group of 10 students in Physical Science and Mathematics.

Physic	50	65	73	80	65	70	60	67	55	75
Math	70	81	90	85	90	90	65	75	72	92

Ans. (a) Rank difference Method (co-efficient correlation)

X	Rx	Y	Ry	D=Rx~Ry	D^2
40	6.5	18	4	2.5	6.25
30	9.5	25	2	7.5	56.25
30	9.5	30	1	8.5	72.25
35	8	23	3	5.0	25.00
					$\Sigma D^2=323.60$

(সহগতির সহগাঙ্ক) $\rho = 1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)} = 1-\frac{6\times 323.60}{10(10^2-1)}$

$$= 1-\frac{1941\cdot 6}{990} = 1-1.86 = -0.86$$

তাৎপর্য ঃ সহ-সম্পর্কের মান ঋণাত্মক এবং উচ্চমানের।

সুতরাং X এর মান বাড়লে Y এর মান কমে এবং X এর মান কমলে Y এর মান বাড়বে।

Example 7 :

Find the rank correlation co-efficient between the scores of students in mathematics and physics from the following data. Interpret the result.

Sl. No. of the students	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mathematics	53	65	39	27	49	70	83	91	21	49
Physics	40	55	40	35	49	69	75	79	31	53

Serial No.	Math	Physics	Rank of Math (R_1)	Rank of Physics (R_2)	$D=R_1 \sim R_2$	D^2
1	53	40	5	7.5	2.5	6.25
2	65	55	4	4	0	0
3	39	40	8	7.5	0.5	0.25
4	27	35	9	9	0	0
5	49	49	6.5	6	0.5	0.25
6	70	69	3	3	0	0
7	83	75	2	2	0	0
8	91	79	1	1	0	0
9	21	31	10	10	0	0
10	49	53	6.5	5	1.5	2.25
						$\Sigma D^2 = 9.00$

$$\rho = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$$ এখানে $D^2 = 9.00$, $N = 10$.

$$\rho = 1 - \frac{6 \times 9}{10(10^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 9}{10 \times 99} = 1 - \frac{3}{55} = \frac{52}{55} = +0.94$$

অঙ্ক ও পদার্থ বিজ্ঞানের স্কোরের মধ্যে উচ্চ ও ধনাত্মক সম্পর্ক আছে। অর্থাৎ যথেষ্ট এ সব শিক্ষার্থী অঙ্কে ভালো তারা ভৌত বিজ্ঞানেও ভাল।

Example 8 :

Find out the Correlation co-efficient from the data given below, using Rank difference method and comment on the results :

Individuals	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Scores in Phy.	15	30	20	15	25	10	35	12	10	15
Scores in Math.	25	25	35	25	30	35	40	20	28	25

Ans : Rp = Rank in Physical Science

R_M = Rank in Mathametics

Individuals	Scores in P.Sc	Scores in Math	R_P	R_M	$D=R_P \sim R_M$	D^2
A	15................	25................	6	7.5	1.5	2.25
B	30................	25................	2	7.5	5.5	30.25
C	20................	35................	4	2.5	1.5	2.25
D	15................	25................	6	7.5	1.5	2.25
E	25................	30..........	3	4	1.0	1.00
F	10................	35................	9.5	2.5	7.0	49.00
G	35................	40................	1	1	0.0	00.00
H	12................	20................	8	10	2.0	4.00
I	10................	28................	9.5	5	4.5	20.25
J	15................	25................	6.0	7.5	1.5	2.25
						$\sum D^2 = 113.50$

∴ সহগতির সহগাঙ্ক $\rho = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$ [D = Rank difference]

এখানে $\sum D^2 = 113.5$, $N = 10$

$$\therefore \rho = 1 - \frac{6 \times 113.5}{10(100-1)} = 1 - \frac{681.0}{990} = \frac{990 = 681}{990} = +0.31$$

এক্ষেত্রে ভৌতবিজ্ঞান ও অঙ্কের মধ্যে ধনাত্মক সহ সম্বন্ধ রয়েছে তবে তা নিম্ন মানের।

Example : 9

Given $r = 0.8$, $\Sigma xy = 60$, $\sigma_y = 2.5$, $\Sigma x^2 = 90$ find the number of items

Ans :

$r = 0.8$, $\sigma_y = 2.5$, $\Sigma xy = 60$, $\Sigma x^2 = 90$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \Sigma x^2 = \frac{90}{N}$$

$$r = \frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y} \text{ or } 0.8 = \frac{60}{N\sigma_x\sigma_y}$$

$$\therefore 0.64 = \frac{3600}{N^2\sigma_x^2\sigma_y^2} = \frac{3600}{N^2 \times \frac{90}{N} \times (2.5)^2}$$

$$\text{or } 0.64 = \frac{3600}{N \times 90 \times 6.25}$$

$$\therefore N = \frac{3600}{90 \times 0.64 \times 6.25} = \frac{40}{4} = 10 \quad \therefore \text{item এর সংখ্যা} = 10$$

Example : 10

Calcutale the coefficient of correletion from the following data by Product Moment Method.

X	12	9	8	10	11	13	7
Y	14	8	6	9	11	12	3

X	X^2	Y	Y^2	XY
12	144	14	196	168
9	81	8	64	72
8	64	6	36	48
10	100	9	81	90
11	121	11	121	121
13	169	12	144	156
7	49	3	9	21
$\Sigma X = 70$	$\Sigma X^2 = 728$	$\Sigma Y = 63$	$\Sigma Y^2 = 651$	$\Sigma XY = 676$

মনে করি পরীক্ষা A এর A.M. = 30

পরীক্ষা B এর A.M. = 15

এক্ষেত্রে f = 1

$$C_x = \frac{-2}{10} = -0\cdot 2, \quad C_y = \frac{-3}{10} = -0\cdot 3$$

$$\therefore \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x'^2}{N} - \left(\frac{\sum x'}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{144}{10} - (-0\cdot 2)^2}$$

$$= \sqrt{14\cdot 4 - \cdot 04}$$

$$= 3\cdot 79$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{65}{10} - (-0\cdot 3)^2}$$

$$= \sqrt{6\cdot 5 - \cdot 09}$$

$$= 2\cdot 53$$

$$\therefore r = \frac{\sum x'y'}{N\sigma x'\sigma y'} = \frac{58}{10 \times 3\cdot 79 \times 2\cdot 53} = +\cdot 604$$

∴ A (পরীক্ষা) ও B (পরীক্ষা) এর মধ্যে সাধারণ ধনাত্মক সহগতি রয়েছে।